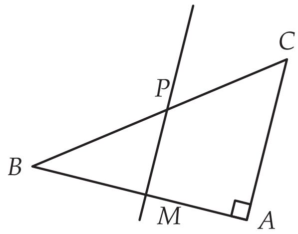
FONCTIONS

1

Généralités sur les fonctions

Approfondir

1 Dans un triangle rectangle — ALGO



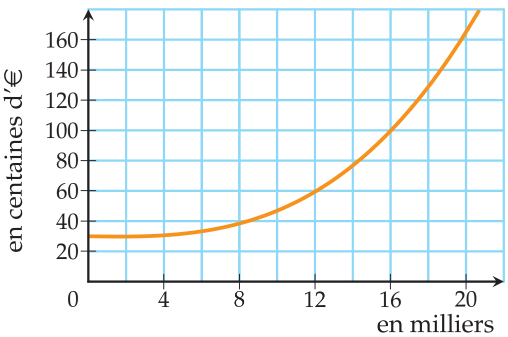
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 4$ et $AC = 3$ et M un point appartenant à $[AB]$. La droite perpendiculaire à (AB) passant par M coupe (BC) en P.

On étudie la longueur BP.

1) Que vaut BP si M est le milieu de $[AB]$?
   Si M est confondu avec le point A ? Avec le point B ?
2) On note $AM = x$.
   a) Quelles sont les valeurs possibles pour x ?
   b) Exprimer BP en fonction de x.
3) Écrire un algorithme permettant de calculer BP à partir de la longueur AM.

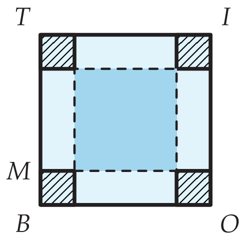
2 En économie — INFO

L'entreprise Flora commercialise des vases en porcelaine. Par an, elle confectionne entre 0 et 20 000 vases. Le coût total de production f, exprimé en centaines d'euros, est fonction du nombre de vases fabriqués, en milliers. Le graphique ci-dessous présente la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f.



1) a) Quel est le coût de production de 10 000 vases ?
   b) Quelle quantité maximale d'objets est-il possible de produire pour un coût inférieur à 14 000 € ?
2) Le coût moyen h est donné par $h(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
   a) Estimer $h(5)$.
   b) Reproduire la courbe $\mathcal{C}$ puis tracer, dans le même repère, la représentation graphique du coût moyen.
   c) Estimer le nombre de vases qu'il faut fabriquer pour obtenir un coût moyen minimal.

3 En boîte !



On considère un carré de côté 15 cm. Dans chaque coin, on découpe un même carré pour obtenir un patron d'une boîte sans couvercle.

Partie A : un patron

1) Construire une boîte en choisissant $BM = 3$ cm.
2) Calculer son volume.
3) Peut-on réaliser une boîte sachant que $BM = 8$ cm ? Expliquer.

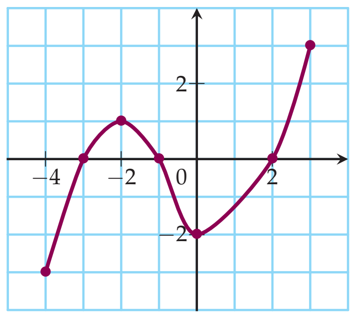
Partie B : une fonction

On pose $BM = x$ et on appelle $\mathcal{V}$ la fonction qui à x associe le volume de la boîte sans couvercle.

1) Déterminer une expression de la fonction $\mathcal{V}$.
2) Quel est l'ensemble de définition de $\mathcal{V}$?
3) À l'aide de votre calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de la fonction $\mathcal{V}$.
4) Pour quelles valeurs de x le volume est-il supérieur ou égal à 100 ?
5) Le volume de cette boîte peut-il dépasser 1 dL ?
   Si oui, donner les dimensions d'une boîte vérifiant cette condition. Si non, expliquer pourquoi.

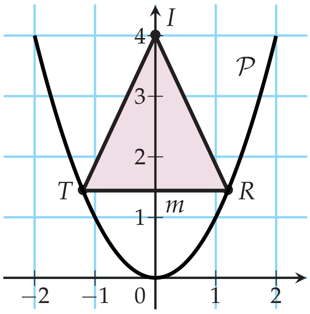
4 Avec un paramètre

On considère une fonction f définie sur $[-4;3]$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1) Quels sont le (ou les) antécédent(s) de 0 par f ?
2) Combien d'antécédent(s) possède 2 ?
3) Quel est le nombre d'antécédent(s) de 1 ?
4) Donner un nombre réel m qui n'a qu'un unique antécédent par f.
5) Donner le nombre d'antécédent(s) de t par f, suivant les valeurs de t.

5 INFO On considère $\mathcal{P}$ la courbe représentative de la fonction carrée, restreinte à l'intervalle $[-2;2]$ et le point I de coordonnées $(0;4)$.



Pour tout nombre réel m de l'intervalle $[0;4]$, on place sur $\mathcal{P}$ les points T et R d'ordonnées m tels que $x_T \leq x_R$.
Le but de l'exercice est de trouver des valeurs de m pour que l'aire du triangle TRI soit égale à deux unités d'aire puis soit maximale et enfin soit minimale.

1) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire la figure et émettre des conjectures sur chacun des problèmes posés.
2) Par la fonction carrée, citer le(s) antécédent(s) de 2.
3) Quelle est l'aire du triangle TRI pour $m = 2$?
4) On définit la fonction $\mathcal{A}$ qui à m associe l'aire du triangle TRI.
   a) Vérifier que, pour tout réel m de $[0;4]$:
   $\mathcal{A}(m) = (4 - m)\sqrt{m}$.
   b) Tracer la courbe représentative de $\mathcal{A}$ à la calculatrice. À l'aide de la courbe :
      i) donner une valeur approchée du (ou des) antécédent(s) de 2 par la fonction $\mathcal{A}$.
      ii) $\mathcal{A}$ admet-elle un minimum ? un maximum ? S'ils existent, combien valent-ils et pour quelle(s) valeur(s) de m sont-ils atteints ?

6 Le triangle ABC rectangle isocèle en B est tel que $AB = BC = 4$ cm. On note M le point de $[AB]$ tel que $AM = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 4$. On place les points P et Q respectivement sur $[BC]$ et sur $[AC]$ tels que le quadrilatère $MBPQ$ soit un rectangle.

Partie A : établir la fonction

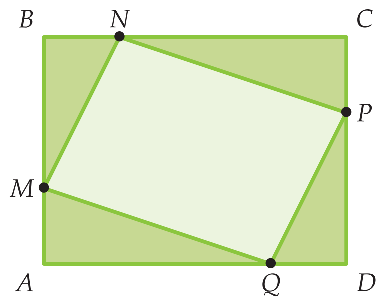
1) Exprimer MB en fonction de x.
2) Pour quelle(s) valeur(s) de x le rectangle $MBPQ$ est-il un carré ?
3) Montrer que l'aire $S(x)$, en cm², du rectangle $MBPQ$ est égale à : $x(4-x)$.
4) Tracer une représentation graphique de S.

Partie B : utiliser la fonction

1) Donner les dimensions des rectangles $MBPQ$, lorsqu'ils existent, ayant pour aire 2, 4 et 5 cm².
2) Vérifier que $x(4-x) - 3 = (1-x)(x-3)$.
3) En déduire les antécédents de 3 par la fonction S. Combien peut-on trouver de rectangles $MBPQ$ ayant une aire de 3 cm² ?

7 **Histoire de parallélogrammes**

On considère un rectangle $ABCD$ de dimensions données : $AB = 6$ cm et $BC = 8$ cm.
Sur le côté $[AB]$, on place un point M quelconque.
On considère ensuite les points N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[DA]$ tels que : $AM = BN = CP = DQ$.



On pose $AM = x$. On appelle f la fonction qui, à x, associe la valeur de l'aire de $MNPQ$.
1) Vérifier que $MNPQ$ est un parallélogramme.
2) AM peut-elle prendre la valeur 7 ?
   Quel est l'ensemble de définition de f ?
3) Quelle peut-être la valeur maximale de $f(x)$?
   Pour quelle valeur de x est-elle atteinte ?
4) Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 14x + 48$.
5) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de f.
   Ajuster la fenêtre d'affichage.
6) Graphiquement, lire les antécédents de 24 et de 36.
7) Les valeurs trouvées sont-elles exactes ? Conclure.

8 **Vrai ou Faux ? Et pourquoi ?**

1) Tout nombre de l'ensemble de définition d'une fonction f a au moins une image par f.
2) Tout nombre de l'ensemble de définition d'une fonction f est l'antécédent d'au moins un nombre par f.
3) Le processus qui, à un nombre, associe soit 0 s'il est pair, soit 1 s'il est premier est une fonction.

SOLUTIONS

Chapitre F1 | **Généralités sur les fonctions**